TD Relations d'ordre

Relations d'ordre

2NV **Exercice 1** On définit une relation sur $\mathbb{N}$ par $(n \preceq m) \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N},\, m = n^p$.
Vérifier que c'est une relation d'ordre. Est-elle totale ?

88E **Exercice 2** ♣ Ordre lexicographique On définit une relation $\preceq$ sur $\mathbb{N}^2$ par

$$(n, m) \preceq (n', m') \Leftrightarrow (n < n' \text{ ou } (n = n' \text{ et } m \leq m')).$$

1. Justifier que $\preceq$ est antisymétrique et qu'elle définit un ordre total.
2. Expliciter un élément de $\mathbb{N}^2$ admettant une infinité d'éléments lui étant inférieurs.
3. On veut montrer que $\preceq$ définit un bon ordre.
   a) Justifier que toute partie A de $\mathbb{N}^2$ admet un plus petit élément pour $\preceq$.
   b) En déduire qu'il n'existe pas dans $(\mathbb{N}^2, \preceq)$ de suite $(a_k, b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante.

W30 **Exercice 3** ★ Confluence On considère une relation binaire $\rightarrow_R$ sur X, et sa complétion transitive (et reflexive) $\rightarrow_R^*$. On dit que $\rightarrow_R$ est

- confluente si $\forall x, y_1, y_2,\ (x \rightarrow_R^* y_1 \text{ et } x \rightarrow_R^* y_2) \Rightarrow \exists z,\ y_1 \rightarrow_R^* z \text{ et } y_2 \rightarrow_R^* z$.
- localement confluente si $\forall x, y_1, y_2,\ (x \rightarrow_R y_1 \text{ et } x \rightarrow_R y_2) \Rightarrow \exists z,\ y_1 \rightarrow_R^* z \text{ et } y_2 \rightarrow_R^* z$.
- noethérienne s'il n'existe pas de suite infinie $x_0 \rightarrow_R x_1 \rightarrow_R x_2 \rightarrow_R \dots$.

On dit qu'une relation d'ordre $\leq$ sur X est un bon ordre, s'il vérifie une des propriétés équivalentes suivantes

- Toute partie non vide de X admet un élément minimal
- Il n'existe pas de suite strictement décroissante d'éléments de X.

On note $\leftarrow_R^*$ la relation symétrique de $\rightarrow_R^*$.

1. Montrer que si $\rightarrow_R$ est noethérienne alors $\leftarrow_R^*$ est un bon ordre.
2. Montrer qu'une relation noethérienne localement confluente est confluente.
3. Un domaine rectangulaire quadrillé $n \times m$ représente un bac à sable. Initialement, chaque case contient une quantité entière de sable. À chaque étape, on peut choisir une des cases du domaine contenant au moins quatre unités de sable, et répartir une unité sur chaque voisin de la case. Le sable sortant du domaine est perdu.
   a) Montrer qu'au bout d'un nombre fini d'étapes, on obtient une configuration finale, où plus aucune opération n'est possible.
   b) Montrer que la configuration finale ne dépend pas des étapes choisies.

VXY **Exercice 4** ★★ $(E, \leq)$ un ensemble ordonné fini. On appelle chaîne de E toute partie de E totalement ordonnée, et cochaîne de E toute partie de E d'éléments deux à deux non comparables.

1. Montrer que la longueur maximale d'une chaîne de E est égale au minimum du nombre de parties d'une partition de E en cochaînes.
2. Si E est de cardinal $\geq nm + 1$. Montrer que E admet une chaîne de longueur $\geq n + 1$ ou une antichaîne de longueur $\geq m + 1$.

Bornes supérieures

A8C **Exercice 5** Déterminer l'ensemble des minorants, des majorants, les bornes supérieures et inférieures, ainsi que les extrema, s'ils existent, des ensembles suivants :

1. $\mathbb{Q} \cap]0,1[$
2. $\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m},\, n, m \in \mathbb{N}^*\}$

RBD **Exercice 6** Soit $A = \left\{\frac{nm}{n^2+m^2}, n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$. L'ensemble A admet-il un maximum, un minimum ?

T19 **Exercice 7** Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. On pose $\alpha = \sup A$ et $\beta = \sup B$.

1. Montrer que si $B \subset A$, alors $\beta \leq \alpha$.
2. Soit $\lambda > 0$. On pose $\lambda A = \{\lambda a, a \in A\}$. Montrer que $\sup\big(\lambda A\big) = \lambda\alpha$.
3. On pose $A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$, montrer que $\sup(A + B) = \alpha + \beta$.
   Indication : *Pour une moitié, utiliser la caractérisation séquentielle, ou avec ε.*

DVJ **Exercice 8** Soit $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées.

1. Montrer que $f + g$ est majorée et que $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$.
2. Montrer que $|f + g|$ est bornée et que $\sup |f + g| \leq \sup |f| + \sup |g|$.
3. Montrer que $\sup f + \inf g \leq \sup(f + g)$.

M2B **Exercice 9** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ minorée. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \inf\{f(t),\, t \geq x\}$.

1. Montrer que g est croissante.
2. Montrer que g est la plus grande fonction croissante qui soit inférieure ou égale à f.
3. Pour $f\colon x \mapsto x + 2\sin x$, représenter l'allure des graphes de f et g.

8VW **Exercice 10** Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{\substack{i\leq n\\ j\leq m}}$ une famille de nombres réels. Montrer que $\max\limits_{1\leq i\leq n} \min\limits_{1\leq j\leq m} a_{i,j} \leq \min\limits_{1\leq j\leq m} \max\limits_{1\leq i\leq n} a_{i,j}$.

H41 **Exercice 11** Distance à une partie Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$.

1. Justifier la définition de $d(x, A)$.
2. ★ Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.

FMT **Exercice 12** ★ Déterminer $\inf_{\alpha \in]0,\pi[} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin n\alpha|$.

SAD **Exercice 13** ★ ★ Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Montrer qu'elle admet un point fixe.

Indication : *Considérer* $\beta = \sup \{x \mid f(x) \geq x\}$.

Principe de descente

BOU **Exercice 14** On considère l'équation diophantienne $(E) : x^2 + y^2 = z^2$.

1. Soit (x, y, z) une solution primitive de (E), c'est-à-dire telle que x, y, z soient premiers entre eux dans leur ensemble.
   a) Montrer qu'exactement un des entiers x, y est pair.
   b) Pour $m > n > 0$, vérifier que $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ est une solution de (E). Montrer qu'elle est primitive si et seulement si $m \wedge n = 1$ et $m \not\equiv n[2]$.
   c) On suppose que x est pair.
      i. Justifier qu'il existe $t \in \mathbb{Q}$ tel que $\frac{x}{z} = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\frac{y}{z} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
      ii. En déduire qu'il existe $m > n > 0$ tels que $(x, y, z) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$.
2. On s'intéresse à présent à l'équation $(F) : x^4 + y^4 = z^2$. Soit (x, y, z) une solution primitive, avec x pair.
   a) On écrit $(x^2, y^2, z) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$. Montrer que n est pair, et que m est un carré.
   b) En appliquant le principe de descente infinie de Fermat, montrer que (F) n'a pas de solution non triviale.

En particulier l'équation de Fermat $x^4 + y^4 = z^4$ n'a pas de solution non triviale.

BD5 **Exercice 15** ★ On dispose de $2n + 1$ cailloux, pour $n \geq 1$, ayant des poids entiers. On suppose que chaque sous-ensemble de $2n$ cailloux peut se partager en deux paquets de n cailloux de même masse totale.

1. Montrer que toutes les masses des cailloux ont la même parité.
2. Montrer que tous les cailloux ont la même masse.
3. Que dire si les poids ne sont plus entiers mais rationnels ?

On peut également étendre le résultat à des poids réels, en considérant une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les poids.

Considération d'éléments extrémaux

78M **Exercice 16** 🏠 Un groupe de n personnes est réparti autour d'une table ronde de sorte que l'âge de chacune soit la moyenne des âges de ses deux voisins. Montrer qu'elles ont toutes le même âge.

0IQ **Exercice 17** Les entiers $1, 2, \ldots, n^2$ sont répartis aléatoirement sur les cases d'un échéquier $n \times n$. Montrer qu'il existe deux cases adjacentes (éventuellement diagonalement) dont les valeurs diffèrent d'au moins $n + 1$.

JI1 **Exercice 18** On considère $2n + 1$ personnes dans le plan. On suppose que les distances entre chaque paire de personnes sont toutes distinctes. À un instant donné, chaque personne va tirer sur son voisin le plus proche. Montrer qu'au moins une personne survit.

Jeux

BE4 **Exercice 19** ★ On modélise un jeu par un graphe G orienté fini admettant un sommet initial i et un sommet final f qui est gagnant pour le joueur qui l'atteint. La partie commence sur le sommet i et deux joueurs alternent.

On rappelle que si G est acyclique, d'après le théorème de Zermelo, un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

1. On suppose que G est acyclique et admet un deuxième état final f' qui entraîne un match nul s'il est atteint. Montrer que ou bien un des deux joueurs a une stratégie gagnante, ou bien il existe deux stratégies s_1, s_2 telles que si le i-ème joueur utilise la stratégie s_i, il soit garanti d'obtenir au pire un match nul, quelle que soit la stratégie de l'autre joueur.
2. On revient à l'hypothèse d'un unique état final gagnant, on ne suppose plus que G est acyclique, mais que si un même état est atteint à deux reprises lors d'une partie, celle-ci est déclarée nulle. Montrer la même alternative que précédemment.

XQR **Exercice 20** Deux joueurs posent tour à tour des pièces identiques de rayon 1 à l'intérieur d'un disque de rayon 10. Les pièces ne peuvent pas se superposer, et le premier joueur à ne pas pouvoir jouer perd. Trouver une stratégie gagnante pour l'un des joueurs.

Indication : *Le premier joueur a une stratégie gagnante. Chercher à utiliser de la symétrie.*

4GO **Exercice 21** Chomp On part d'une tablette de chocolat rectangulaire $n \times m$. Deux joueurs jouent en alternant. À chaque étape, le joueur choisit un carreau restant, et mange ce carreau ainsi que tous les carreaux en bas à droite du carreau. Le joueur qui mange le carreau en haut à gauche perd. Montrer que si $(n, m) \neq (1, 1)$, le premier joueur a une stratégie gagnante.

Indication : *Procéder par l'absurde, et voler la stratégie de l'autre joueur.*

Q7D **Exercice 22** ★ Initialement, une pile contient $N \geq 2$ jetons. Tour à tour, Alice et Bob retirent des jetons de la pile. Initialement, Alice peut en retirer un nombre quelconque compris entre 1 et $N - 1$. Chaque tour suivant, le joueur concerné peut retirer au plus le double du nombre de jetons retirés au tour d'avant. Le joueur qui retire la dernière pièce gagne.

On admet le théorème de représentation de Zeckendorf : tout entier $n \geq 2$ s'écrit, de manière unique, comme somme de nombres de Fibonacci distincts non consécutifs.

Quel joueur a une stratégie gagnante ?